Метод Математичної Індукції

Теорія

У загальному вигляді його можна описати так:

Нехай потрібно довести, що деяке твердження є правильним для будь-якого натурального значення n.

Доведення цього факту методом математичної індукції складається з двох частин(теорем):

1) Доводять (перевіряють) справедливість твердження для n=1(або для деякої більшої кількості значень n, якщо це важливо) ;(База індукції)
2) Роблять припущення, що твердження є правильним для n=k, і на підставі цього доводять, що воно є правильним для n=k+1.(Перехід індукції)

Задачі

1) Прямі загального положення – такі, серед яких нема паралельних і ніякі три не перетинаються в одній точці. Кілька (не менше трьох) прямих загального положення ділять площину на частини. Довести, що хоча б одна з цих частин - трикутник.
2) (Гра «Ханойська вежа») Є піраміда з n кільцями зростаючих розмірів (внизу найбільше) і ще два порожніх стрижня тієї ж висоти. Дозволяється перекладати верхнє кільце з одного стрижня на інший, але при цьому забороняється класти більше кільце на менше. Довести, що можна перекласти всі кільця з першого стрижня на один з порожніх стрижнів.
3) Довести, що умову попередньої задачі можна виконати за 2^n-1 перекладувань, де n – кількість кілець.
4) Довести: $1^2+2^2+..+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
5) $1^2+3^2+..+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$
6) $\dfrac{1\cdot 4}{2\cdot 3}+\dfrac{2\cdot 5}{3\cdot 5}+..+\dfrac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+1)}{n+2}$
7) У шаховому турнірі взяли участь n шахістів. Кожний зустрівся з кожним іншим один раз, причому жодна партія не закінчилась в нічию. Довести, що за результатами турніру всіх шахістів можна пронумерувати в такому порядку, щоб кожний попередній був переможцем наступного.
8) Доведіть біном Ньютона за допомогою математичної індукції. А саме рівність: $(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+..+C_n^{n-1}a^1b^{n-1}+b^n$
9) (Теорема Холла) Є дві множини дівчат і хлопчиків. Деякі хлопчики і дівчата знають один одного. Нехай хлопчиків n і дівчат m, де m>n. Ми хочемо кожному хлопчику поставити в пару дівчинку так, щоб вони знали один одного і ніяка дівчинка не була в парі з двома хлопчиками одночасно. Доведіть, що це можливо зробити тоді і тільки тоді, коли виконується така умова: будь-які k хлопчиків знають щонайменше k дівчат.

10) Для натурального числа n позначимо через $d(n)$ кількість натуральних дільників числа, включаючи 1 та n. Знайдіть усі такі натуральні n, для яких у множині: $\{ n, d(n), d(d(n)), d(d(d(n))), \ldots \}$ немає жодного квадрату натурального числа.

11) На дошці записані n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Андрій та Богдан грають у таку гру, яка складається рівно з n кроків. На кожному кроці Андрій обирає довільне число і віднімає це число від кожного із записаних на дошці чисел (тобто на дошці вже записані нові числа). Після цього Богдан замість кожного числа на дошці записує модуль цього числа. По завершенню гри (n кроків) Андрій сплачує Богдану суму усіх записаних чисел у гривнях. Для кожного заданого набору чисел визначить яку найменшу суму може програти Андрій при правильній своїй грі.